UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 33. Marzo de 2013
páginas 137-145

Ideas para enseñar: ¿Cómo facilitar el proceso de demostración matemática en estudiantes universitarios?

Rodolfo Eliseo D´Andrea, Patricia Sastre Vázquez

Fecha de recepción: 5/06/2011
Fecha de aceptación: 1/03/2013

Resumen	El objetivo de este trabajo es mostrar cómo puede facilitarse al estudiante universitario el abordaje de la demostración matemática. La dificultad del estudiante frente a este proceso tiende a universalizarse y el modelo didáctico utilizado en este trabajo podría aplicarse en diferentes contextos. En este trabajo se presenta un instrumento (Guía Secuenciada), el cual facilita al estudiante la reproducción de demostraciones. Esta guía fue utilizada con estudiantes universitarios obteniéndose resultados alentadores. **Palabras clave**: Demostración matemática, modelo didáctico.
Abstract	The goal of this work is to show how it can be facilitated the university student the boarding of the mathematical demonstration. The student's difficulty in front of this process lays to be universalized and the didactic model used in this work could be applied in different contexts. In this work an instrument is presented (Sequential Guide), which facilitates the student the reproduction of demonstrations. This guide was used with university students being obtained encouraging results. **Keywords**: Mathematical demonstration, didactic model
Resumo	A meta deste trabalho é mostrar como pode ser facilitado o estudante universitário a tábua da demonstração matemática. A dificuldade do estudante se deita para ser universalizada na frente deste processo e o modelo didático usou neste trabalho poderia ser aplicado em contextos diferentes. Neste trabalho é apresentado um instrumento (Guia Seqüente) que facilita o estudante a reprodução de demonstrações. Este guia era usado com estudantes universitários que são obtidos resultados encorajadores. **Palavras-chave**: Demonstração matemática, o modelo educacional

1. Introducción

En general, cuando el estudiante universitario de Argentina aborda o intenta la explicación de la demostración de un teorema o proposición verdadera, lo hace sin comprender. Y cuando comprende, cabe preguntarse: ¿Qué es lo que comprende?. Mientras el docente realiza las explicaciones, los estudiantes entienden el proceso que se lleva a cabo. Pero a la hora de abordarlas autónomamente o intentar reproducirlas o realizar algunas similares, les resulta complejo tal abordaje. De modo que el proceso de apropiación se limita a un conocimiento estático.

El raciocinio se manifiesta a través de la deducción, manejando la Ciencia Matemática elementos como: conceptos primitivos, definiciones, y proposiciones.

Las proposiciones son de tres tipos:

a) Los axiomas que son proposiciones verdaderas, que se aceptan intuitivamente, y que no necesitan ser demostradas.

b) Las proposiciones verdaderas, que a diferencia de cualquier proposición común del lenguaje cotidiano requieren inexorablemente para tener validez, ser demostradas. Dentro de esta categoría podrían englobarse: Los Lemas, que son proposiciones que forman parte de un teorema más largo. Y Los Corolarios que se trata de proposiciones que siguen inmediatamente a un teorema, o sea que resultan, su consecuencia.

c) Los Teoremas, que tienen el mismo tratamiento que las proposiciones verdaderas citadas en b), pero son trascendentes dentro de la comunidad matemática para así ser consideradas.

Un teorema o una proposición verdadera no axiomática consta de Hipótesis, Tesis y Demostración. La Hipótesis es una suposición que permite inferir una consecuencia. Debe tenerse presente que la hipótesis incluye también las denominadas “hipótesis implícitas”. Estas constituyen, todos los conocimientos previos que se tienen al momento de establecer la hipótesis del teorema a probar.

La Tesis es una proposición mantenida con razonamientos, ¿Cuáles? Los que determinan la estructura de la demostración. ¿Y quiénes determinan esa estructura? Los ‘eslabones’ que constituyen la cadena de la denominada demostración o prueba del teorema o proposición a demostrar. Son los pasos necesarios para resolver (o llegar) a probar la verdad que postula la tesis.

La Demostración matemática, es la argumentación utilizada para mostrar la veracidad de una proposición matemática cualquiera. Una demostración en general comienza con una o más declaraciones denominadas premisas. Y la prueba resulta de utilizar las reglas de la lógica, de modo que si las premisas son verdaderas, entonces una determinada conclusión debe ser también cierta. Es interesante destacar, lo que señala Montoro (2007) al referirse a la demostración: “*Desde la tradición platónico-aristotélica y hasta nuestros días, la noción filosófica de demostración se relaciona con la derivación de un enunciado a partir de otros enunciados, llamados premisas, mediante la aplicación de determinadas leyes lógicas; en esta idea de demostración subyace siempre una búsqueda razonable de la verdad.*”

2. El estudiante y la demostración

Desde lo curricular, en el ciclo medio, se produjo la eliminación de la exposición de la prueba de teoremas. Esto incluye la exposición de la teoría en general, como manifiestan claramente Legorburu y Miguiarra (2004): “*En la década del 90, se inició una tendencia a eliminar la enseñanza del método axiomático en la escuela, hasta llegar a suprimir la presentación de los teoremas en la forma convencional (con hipótesis, tesis y demostración), situación que continúa hasta la actualidad* “.

Riviére Gómez (2001) en referencia con la demostración en el nivel medio manifiesta que existen opiniones comunes, que no guardan conexidad y consistencia, presentando contradicciones, siendo algunas de ellas:

a) En el ciclo medio no se realizan demostraciones. No se hace hincapié en los desarrollos teóricos. A veces esta idea toma la forma de “*En la enseñanza secundaria las matemáticas se muestran, en la universidad se demuestran*”.
b) Es imposible hacer demostraciones. No las comprenden. Son incapaces de entender y menos reproducir una demostración. Por ende, las elimino.
c) Debe elegirse entre realizar demostraciones y aprender algoritmos.
d) Enseñar matemáticas es enseñar a demostrar.

Si se piensa en el proceso de enseñanza y aprendizaje de Matemática, debe respetarse la esencia de su método y por ende es esencial favorecer y estimular la etapa de validación matemática. Es importante Integrarla a la práctica cotidiana, sin que se constituya en un compartimiento estanco, lo que es muy común y coloca consecuentemente al estudiante frente a un clásico binomio antagónico: teoría – práctica.

Si bien en estudiantes de Ingeniería no interesa desarrollar la habilidad “demostrar”, es importante que éstos puedan comprender y reproducir, no textualmente pero si de forma aproximada, las pruebas de las proposiciones y teoremas que el curso de Matemática requiera. Estimular el pensamiento lógico–abstracto no se logra solamente a través de la fase procedimental de esta disciplina. Dreyfus (2000) manifiesta que las demostraciones – entendidas en sentido amplio – deberían estar presentes de forma subyacente en todos los componentes del currículo de Matemáticas. Esto no significa reproducir demostraciones de memoria, tomando el formalismo bourbakiano, sino tener en cuenta como expresa Arrieta (1994) que *“la aceptación de un teorema por la comunidad matemática se realiza mediante un proceso social en que interesa más la comprensión y significado del mismo que el de la prueba rigurosa*.”

Esto lleva a pensar en la importancia de fortalecer en el estudiante universitario, la comprensión de lo postulado por un teorema y la generación de una “*working proof*” (Resnick, 1992). Este autor afirma que la matemática contemporánea está repleta de "*working proof*", esto es, pruebas informales, no axiomatizadas.

El paradigma del proceso de enseñanza y aprendizaje respecto a la exposición de los cursos de Matemática universitaria, ha cambiado en ciertos aspectos. El cambio radicó primeramente en la desaparición gradual de la clásica exposición bourbakiana de desarrollos teóricos dirigidos a los estudiantes, que imperó hasta la década del 90. Si bien no ha desaparecido por completo, de a poco va difuminándose en los diferentes lugares donde todavía está presente. El cambio también se hizo presente en la implementación de bibliografías más didácticas, visualmente ricas y con explicaciones que recurren a situaciones reales. Pero el proceso evaluativo sigue vigente, en su casi generalidad, de la misma manera que en los últimos treinta años. Con excepción de algunas propuestas innovadoras y aisladas que se producen en algunas casas de estudios, la evaluación de los cursos de Matemática dirigidos a estudiantes universitarios consiste en una serie de parciales con actividades procedimentales, con alguna eventual propuesta teórica. El estudiante luego de estos parciales, en el examen final, vuelve a pasar por una instancia práctica. Y luego para la acreditación de la asignatura, pasa a una instancia teórica, donde deberá reproducir ciertos teoremas expuestos por el docente durante el desarrollo del curso. Y allí aparece el principal inconveniente.

Por un lado están los estudiantes que pudieron acceder a la práctica, y a la instancia teórica no pueden acreditarla, por falta de comprensión de los procesos deductivos. Por otro, están aquellos estudiantes que acreditan esta instancia pero que lo hacen desde una posición memorística y ritual. El estudiante a la hora de reproducir una prueba expuesta por el docente en clase, lo hace precisamente "*como un ritual, un discurso que debe repetir o cuyo estilo debe imitar si se le pide probar un enunciado, más que como una herramienta explicativa basada en un sistema común de validación construido y aceptado por él y su grupo" (*Balacheff, 1982)". Finalmente, y son los menos, están aquellos alumnos que acreditan la asignatura con la comprensión, producto de un aprendizaje constructivo, tanto de las actividades procedimentales como teóricas.

Dependiendo a qué carrera universitaria va dirigido el curso de Matemática se hace hincapié en diferentes contenidos. Pero, tanto en el proceso de enseñanza como en el de aprendizaje no debe dejarse de lado la epistemología, esta es invariante. De lo contrario ya no se está enseñando Matemática, sino un "recetario" de fórmulas y problemas. En virtud de esto, es atinado pensar que según a qué carrera vaya dirigido el curso de Matemática, ciertas demostraciones pueden hacerse más ligeras o bien, directamente pueden obviarse, pero no se debería considerar la posibilidad de la supresión definitiva de estas.

3. Modelo didáctico que facilita la realización de las demostraciones

Se sabe que para demostrar un teorema "no hay recetas", cada uno que se presenta, es una situación nueva. Pero existen ciertos lineamientos o pautas a seguir que constituyen los métodos a aplicar en diferentes situaciones. Asimismo, más allá de esas metodologías y reglas, a cada momento se presentan situaciones diferentes que requieren de ingenio y destreza. Con ingredientes que son comunes y que se requieren siempre: raciocinio y capacidad deductiva, además de una importante capacidad de abstracción.

D´Andrea (2010), propone un modelo didáctico para la presentación de un teorema a demostrar en el ámbito áulico. Este modelo consiste de una serie de estrategias didácticas mostradas como una secuencia de tareas. El modelo, se basa esencialmente en las tres facetas que hacen al Lenguaje Matemático y en permitirle al estudiante, el pasaporte al conocimiento de dicho lenguaje. Este lenguaje se manifiesta como: 1) coloquial, 2) visual y 3) simbólico. El primero tiene que ver con la conexión del lenguaje que le es propio a esta Ciencia, y el lenguaje natural de la persona. A través de este, el sujeto de aprendizaje traduce a sus propios códigos lo comprendido desde el lenguaje simbólico. Esta fase es esencial, y en la que el docente debe hacer mucho hincapié. Su significación y comprensión depende de lo que el docente transmita desde el lenguaje cotidiano y lo que el estudiante pueda captar de esto.

La visualización de la estructura conceptual a apropiarse o teorema a probar, es una fase que puede preceder o anteceder a la anterior. Ya que la cultura visual de la generación de estudiantes posmodernos es el icono de esta generación. Por ende, poder establecer comunicación en el aprendizaje a través de esta fase constituye un factor tan o más importante que el coloquial. En virtud que lo visual, actualmente supera a lo coloquial.

El teorema o proposición verdadera a demostrar no es la excepción. Muchas veces, resulta que lo más importante previamente a la tarea de demostrar, es la comprensión del enunciado. Tiene que estar claro que se quiere probar y ocurre en la mayoría de las oportunidades, que el enunciado termina quedando en segundo plano. Como consecuencia de la comprensión de la proposición, desde el lenguaje natural y propio del estudiante y la visualización, el acceso al lenguaje que le es propio a la Ciencia Matemática se simplifica.

Así, el modelo, complementando al conocimiento del lenguaje matemático y siguiendo el lineamiento de las facetas presentes en tal lenguaje, requiere una serie de secuencias a seguir frente a la presentación de cada contenido conceptual o teorema a demostrar. Así, la secuencia de tareas a seguir para la presentación de un teorema o proposición verdadera a demostrar es la siguiente: 1) Presentación del teorema o proposición verdadera a demostrar; 2) Interpretación coloquial; 3) Verificación; 4) Visualización; 5) Simbolización; 6) Detección de los elementos epistemológicos que hacen a la estructura lógica de la proposición: hipótesis (se incluyen las hipótesis implícitas) y tesis 7) Contenidos conceptuales implícitos de la proposición; 8) Pregunta disparadora de abstracción; 9) Guía Secuenciada de la Demostración y 10) Análisis de artificios matemáticos.

4. Guía Secuenciada

La Guía Secuenciada consiste de una serie de instrucciones que contemplan el paso a paso de la prueba en cuestión para propiciar la construcción de esos razonamientos de forma autónoma. La Guía permitirá observar y también reproducir aproximadamente la demostración una vez realizada y mostrada por el docente, desde una perspectiva global hacia otras más focalizadas. Posibilita la construcción de la prueba generando aprendizajes comprensivos y significativos y no un "*conocimiento inerte*" (Perkins, 1995), sin interacción.

Se recomienda que el docente genere, para la asignatura que dicta, una Guía Secuenciada de la totalidad de los teoremas o proposiciones a demostrar durante el desarrollo del curso. La redacción de la Guía debe tener la mayor claridad posible y ser equilibrada en su extensión no siendo ni demasiado larga, ni demasiado corta de modo de evitar generar ambigüedades en el estudiante a la hora de su lectura. Esta Guía es una interesante posibilidad para sanear el inconveniente de la memorización por parte de los estudiantes a la hora del requerimiento de demostraciones en exámenes finales.

La idea de la *Guía Secuenciada* está inspirada en la siguiente cita textual de Poincaré (1908): *"Una demostración matemática no es más que una simple yuxtaposición de silogismos, de silogismos colocados en cierto orden; y el orden en que están colocados estos elementos es más importante que los elementos mismos. Si tengo el sentimiento, la intuición, por decirlo así, de este orden, que me permite percibir de una ojeada la totalidad del razonamiento, no debo sentir temor de olvidar ninguno de los elementos, cada uno de los cuales vendrá a colocarse por sí mismo en el cuadro que le está asignado, y sin que me vea obligado a hacer ningún esfuerzo de memoria.".*

La demostración matemática exige un orden, y ese orden tiene que guiar el proceso del razonamiento. Cuando el proceso no está guiado por lo que Poincaré llama el "sentimiento" o "intuición" de su orden, la sucesión de silogismos conduce a conclusiones verdaderas o identidades, pero que no son las que se quieren demostrar.

5. Ejemplos de la Guía Secuenciada

5.1. Cociente entre números complejos en forma polar

¿Cómo puede probarse que el cociente entre dos números complejos, expresado en forma polar, es otro número complejo cuyo módulo es el cociente de los módulos y su argumento es la diferencia de los argumentos?

Guía Secuenciada: Considerar que el cociente entre dos números complejos z y z' arroja un cierto resultado (darle un nombre) y despejar luego z o z' en función de los otros dos. Expresar ambos miembros de la igualdad planteada, en forma polar y luego de tener en cuenta la definición del producto de números complejos en forma polar. Considerar la definición de igualdad entre números complejos, correspondiente al formato polar. Aplicada la definición, deben despejarse los valores del módulo y el argumento del número complejo resultado del cociente al cual se le otorgó un nombre al comienzo de la prueba. Tener presente que tal definición debe considerarse particularmente para $k = 0$.

Resolución: Simbólicamente si:

$$z = \rho_{\varphi} \text{ y } z' = \rho'_{\varphi'} \text{ entonces } \frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'}_{\varphi - \varphi'}$$

Se sabe que el cociente de dos números complejos es otro número complejo. Es atinado, darle un nombre a este nuevo complejo, e inclusive nombrar su módulo y su argumento. El objetivo es encontrar el módulo y el argumento de este nuevo número complejo. Así escribimos: $\frac{z}{z'} = w$ siendo $w = R_{\alpha}$.

Teniendo en cuenta: la definición, en forma polar, de igualdad entre números complejos y del producto polar entre números complejos; y despejando las incógnitas buscadas. Resulta entonces que el módulo y el argumento del número complejo cociente, se obtiene mediante la siguiente cadena argumentativa:

$$\frac{z}{z'} = w \Leftrightarrow z = w.z' \Leftrightarrow \rho_{\varphi} = R_{\alpha}.\rho'_{\varphi'} \Leftrightarrow \rho_{\varphi} = R.\rho'_{\alpha+\varphi'} \Leftrightarrow \rho = R.\rho' \wedge \varphi + 2k\pi\alpha =$$
$$= \alpha + \varphi' \Leftrightarrow R = \frac{\rho}{\rho'} \wedge \varphi - \varphi' + 2k\pi\alpha = \alpha$$

Considerando $k = 0$, resulta: $\frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'}_{\varphi - \varphi'}$ $_{Q.E.D.}$

5. 2. Determinación de la monotonía de una función

Se considera a continuación, una de las tres proposiciones que constituye la totalidad de este teorema. Este contempla, según sea el signo de la primer derivada, que la función sea creciente, decreciente o constante.

Si $f: [a,b] \Rightarrow R$ es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces, cualesquiera sea $x \in (a,b): f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en (a,b). ¿Cómo puede demostrarse que la función de la hipótesis es estrictamente creciente si la función derivada primera es positiva?

UNIÓN

Guía Secuenciada: Considerar la función de la hipótesis, y un subintervalo de la misma, que puede llamárselo, por ejemplo: $[x, y] \subset [a, b]$. Luego, aplicar a la función f el teorema del valor medio del Cálculo Diferencial o Lagrange en el subintervalo, previa verificación del cumplimiento de las hipótesis. Posteriormente analizar el signo de la expresión obtenida y teniendo en cuenta la hipótesis sobre el signo de $f'(x)$ y la definición de función estrictamente creciente, se podrá arribar a la tesis.

Resolución: Considerando la definición de función estrictamente creciente en un intervalo: f es estrictamente creciente en (a, b), si dados $x, y \in (a, b) / x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$. Es importante visualizar la definición precedente. Se quiere probar que: $f(x) - f(y) < 0$, esta diferencia puede ser vista como el numerador del cociente incremental de la función de la hipótesis en el intervalo $[x, y]$. Este cociente involucra implícitamente el teorema del valor medio del Cálculo Diferencial o Lagrange.

Si se trata de aplicar el teorema citado a la función de la hipótesis en el intervalo $[x, y] \subset [a, b]$, previo chequeo de las hipótesis, se obtiene la siguiente cadena argumentativa:

f continua en $[x, y] \subset [a, b]$, y derivable en $(x, y) \subset (a, b)$ luego, por Lagrange, existe

$$c \in (x, y) / f'(c).(y - x) = f(y) - f(x) \overset{1}{\Rightarrow}$$

$$\overset{1}{\Rightarrow} f(y) - f(x) > 0 \Longrightarrow f(y) > f(x) \overset{2}{\Rightarrow} f \text{ es creciente en } (x, y) \subset (a, b)_{Q.E.D.}$$

1. El primer miembro de la igualdad, es positivo. Ya que se trata del producto de dos cantidades positivas. Una lo es por hipótesis y la otra por ser la amplitud de un intervalo. Por ende, el segundo miembro de la igualdad, es positivo.

2. por definición de función estrictamente creciente.

5. 3. Álgebra de los Límites: Límite de la suma.

$$\text{Sean } f, g \text{ tales que: } \lim_{x \to x_0} f(x) = L_1 \text{ y } \lim_{x \to x_0} g(x) = L_2 \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = L_1 + L_2$$

¿Cómo puede demostrarse que el límite de la suma de las funciones es igual a la suma de los límites?

Guía Secuenciada: Partiendo de la hipótesis, se debe aplicar a cada una de las funciones, la definición de límite, sujetando la elección de cada valor de ε con lo que se quiere lograr en la tesis. En virtud de lo último descrito, plantear la definición de límite para la tesis, y "trabajar" la desigualdad que involucra ε. Será necesario aplicar la desigualdad triangular. La expresión de la tesis desglosada orienta sobre como deberán ser elegidos los valores de ε de la hipótesis.

Por ejemplo, si se elige un valor dependiente de ε de la hipótesis de la forma: $\frac{\varepsilon}{2}$, ¿Cómo deberá ser el otro valor? Y si se elige un valor dependiente de ε de la hipótesis de la forma: $\frac{2\varepsilon}{3}$, entonces: ¿Cómo deberá ser el otro valor?. Tener en cuenta que la elección del radio del entorno del punto x_0, dependerá de los radios de los entornos del punto de las funciones de las hipótesis. Pensar entonces cómo deberá ser el radio, porque con la elección del mismo se finaliza la demostración.

Resolución: Por hipótesis se sabe que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon' > 0 : \exists \delta_1 > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon' > 0 : \exists \delta_2 > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - L_2| < \varepsilon$$

¿Qué es lo que se quiere probar?

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_\varepsilon > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon$$

Se considera a continuación la expresión que contiene la desigualdad última en detalle.

$$|f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| = |(f(x) - L_1) + (g(x) - L_2)| =$$
$$= |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \varepsilon$$

Ahora, ¿Cómo se logra la última desigualdad?

Eligiendo para las hipótesis valores dependientes de ε que sean tales que logren establecer la última desigualdad. Entonces para ello es conveniente volver a escribir las hipótesis nuevamente así:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0 : \exists \delta_1 > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \, (1)$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0 : \exists \delta_2 > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} \, (2)$$

Teniendo en cuenta (1) y (2) en las dos últimas desigualdades, se tiene:

$$|f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| = |(f(x) - L_1) + (g(x) - L_2)| = |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, si\ \delta_\varepsilon \leq mín\{\delta_1, \delta_2\}$$

Nota: Los valores de ε, se construyen de forma tal que generen en la suma de la desigualdad que debe probarse, el valor total de ε. Por ejemplo, si se elige uno de los valores de $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{3}$, el otro debe ser tal que su suma arroje como resultado ε. Así, ese valor buscado debe ser: $\frac{2\varepsilon}{3}$.

6. Conclusiones

El estudiante universitario requiere de dos facetas que se hallan siempre presentes en un curso de Matemática. Por un lado, la heurística presente en el desarrollo de las actividades procedimentales, direccionado a la habilidad para resolver problemas. Por otro, necesita disciplinar el raciocinio a través de la argumentación presente en el proceso de validación de teoremas, lo que disciplina mentalmente para la toma de decisiones y el sostén de las mismas en el futuro profesional. Así, es necesario educar a los estudiantes en la justificación y argumentación de lo que aseguran como verdadero o falso basándose en resultados y propiedades que ya conocen. Inclusive en la resolución de actividades procedimentales. Esta tarea no es sencilla. Como afirma Dreyfus (2000): “no deberíamos esperar que nuestros estudiantes sean capaces de captar demostraciones sofisticadas y de alto nivel, sin haber estado expuestos durante muchos años al espíritu de la justificación y a la naturaleza del pensamiento matemático.”

El modelo propuesto por D´Andrea (2010) es una interesante alternativa para superar la inercia del estudiante universitario frente a la prueba matemática, pero su aplicación requiere tener ciertos recaudos. Es ideal su utilización desde los cursos iniciales. Es factible que se aplique la Guía Secuenciada, en diferentes regiones, ya que el problema del abordaje de la demostración en el estudiante en general, es universal.

Bibliografía

Arrieta, J. (1994.). Las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria. ¿Cambio curricular para que todo siga igual?. Signos*. Revista de Teoría y Práctica de la Educación*, núm. 13, 70-81.

Balacheff, N. (2000): "Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas". Una empresa docente. Universidad de Los Andes. (Bogotá).

D´Andrea, R.E. (2010). Análisis del razonamiento deductivo de estudiantes de Carreras de Ciencias Naturales e Ingenierías en el proceso de validación de proposiciones matemáticas. Tesis de Maestría. Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Comahue. Neuquén. Argentina.

Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido a lo largo del curriculum. En Gorgorió, N.,Deulofeu, A. y Bishop, A. (Coords.). Matemáticas y Educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional. Barcelona. Graó, S.R.L. pp.125–133.

Legorburu, N y Miguiarra, M. (2004). Volver a las demostraciones. Revista Enseñar. 3er Ciclo. Número 2. Septiembre 2004. Editorial Clarín.

Montoro, V. (2007). Concepciones de estudiantes de profesorado acerca del aprendizaje de la demostración. REIEC. Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias. Año 2 – Número 1– pp. 101 – 121. ISSN 1850 – 6666

Perkins, D. (1995). La escuela inteligente. Gedisa. Barcelona.

Poincaré, H. (1981).La Ciencia y el Método. CONACyT. México.

Resnick, M.D. (1992). Proof as a source of truth, en Detlefsen, M.(ed.). Proof and knowledge in mathematics, pp.6-32. Londres: Routledge.

Riviére Gómez, V. (2001). Convencer y formalizar. Papel y límites de la demostración en secundaria. X JAEM. Ponencia P24. pp.213-221.

Rodolfo Eliseo D´Andrea. Magíster en Educación Matemática. Profesor Adjunto e investigador en Facultad de Química e Ingeniería de Universidad Católica Argentina y Facultad de Agronomía de Universidad Nacional de la Provincia de Buenos Aires, Argentina. Autor de varios libros y disertante en numerosos congresos sobre Educación Matemática. **rodolfoedandrea@yahoo.com.ar**

Patricia Sastre Vázquez. Doctora en Matemática Aplicada, España. Profesora Titular e investigadora en Facultad de Agronomía de Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina. Dirige proyectos de investigación en Educación Matemática. Autora de varios capítulos de libros y numerosos artículos en revistas científicas. Email: **pasava2001@yahoo.com.ar**